Correction de l'exercice 9

Enoncé :

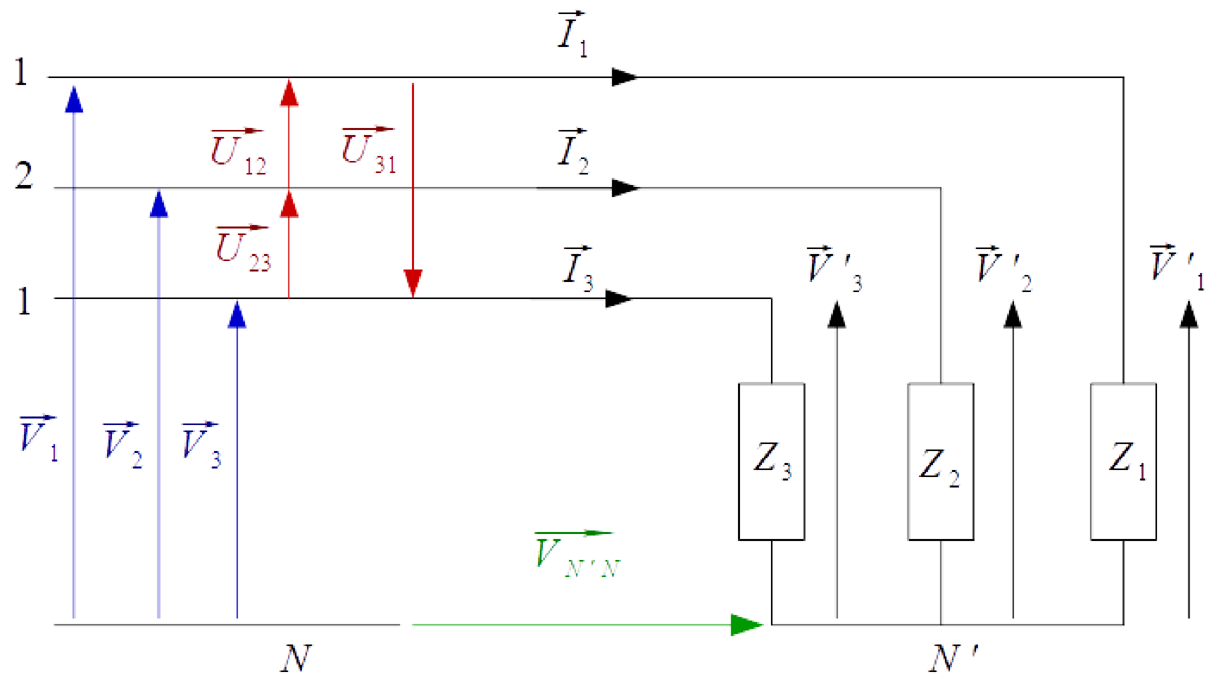
Trois bobines A, B et C sont connectées en étoile sans fil neutre aux bornes d'un réseau dont la tension est U = 380 V et la fréquence est de 50 Hz. Déterminer les courants dans les trois récepteurs et les tensions à leurs bornes.

On donne :

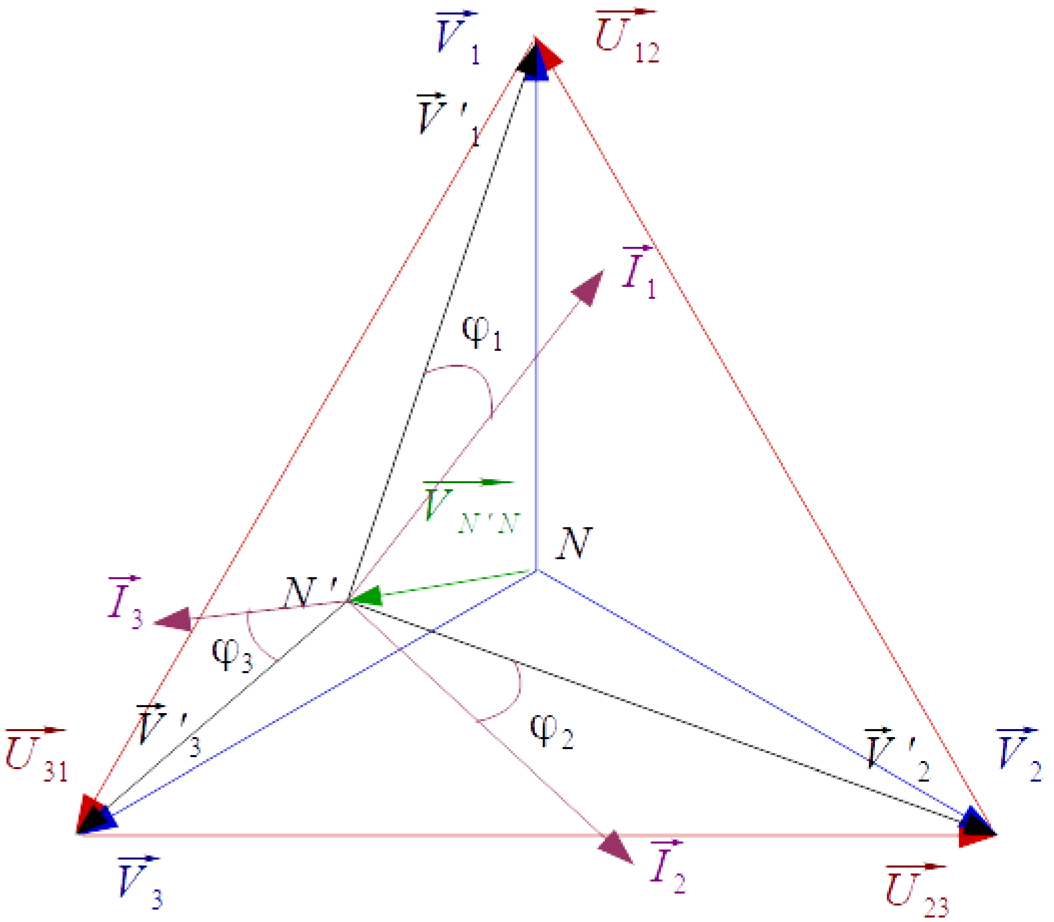
- pour la bobine A : Z1 = 10 Ω et cos φ_1 = 0,85
- pour la bobine B : Z2 = 15 Ω et cos φ_2 = 0,7
- pour la bobine C : Z3 = 20 Ω et cos φ_3 = 0,75

I- Méthode vectorielle :

Partant d'un système triphasé équilibré en tension (imposé par l'alternateur), nous pouvons adopter la configuration ci-dessous :



La représentation vectorielle est donnée comme suit :



Il s'agit d'un système triphasé sans fil neutre, autrement-dit, il existe deux points neutres, le premier est celui du réseau (N) et le second est celui des trois charges, c'est un point neutre fictif (N').

A partir de cette représentation, nous pouvons écrire :

$$\vec{V}_1 = \vec{V}'_1 + \overrightarrow{V_{N'N}}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}'_2 + \overrightarrow{V_{N'N}}$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}'_3 + \overrightarrow{V_{N'N}}$$

Sachant que :

$$I_1 = \frac{V'_1}{Z_1} \qquad I_2 = \frac{V'_2}{Z_2} \qquad et \qquad I_3 = \frac{V'_3}{Z_3}$$

On pose :

$$I'_1 = \frac{V_1}{Z_1} = \frac{220}{10} = 22\,A$$

I'$_1$ est en retard de phase de 31.8° par rapport à V$_1$

$$I'_2 = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{220}{15} = 14{,}7\,A$$

I'$_2$ est en retard de phase de 45.6° par rapport à V$_2$

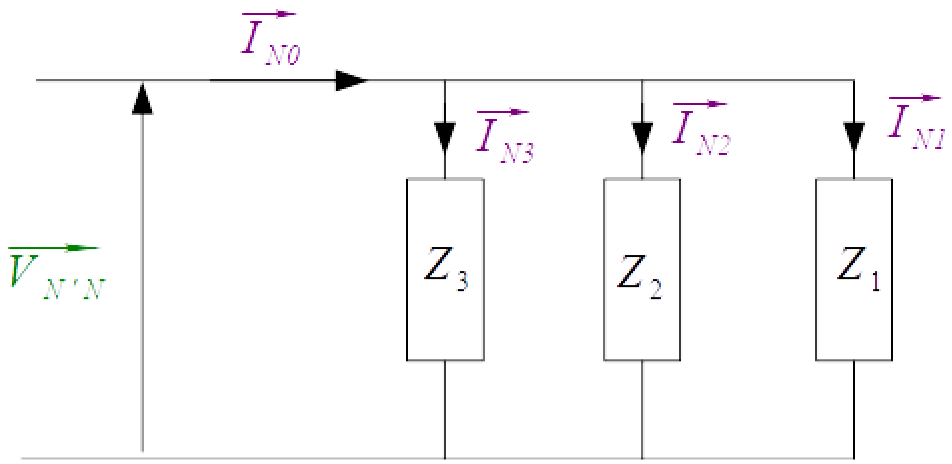
$$I'_3 = \frac{V_3}{Z_3} = \frac{220}{20} = 11\,A$$

I'$_3$ est en retard de phase de 41.4° par rapport à V$_3$

On divise V1 par Z1, V2 par Z2 et V3 par Z3, on obtient :

$$\vec{I}'_1 = \vec{I}_1 + \overrightarrow{I_{N1}} \qquad \vec{I}'_2 = \vec{I}_2 + \overrightarrow{I_{N2}} \qquad et \qquad \vec{I}'_3 = \vec{I}_3 + \overrightarrow{I_{N3}}$$

Les courants I_{N1}, I_{N2} et I_{N3} sont issus de la division tension homopolaire $V_{N'N}$ par les impédances Z_1, Z_2 et Z_3 respectivement.



L'addition des courants nous donne :

$$\vec{I}'_1 + \vec{I}'_2 + \vec{I}'_3 = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 + \overrightarrow{I_{N1}} + \overrightarrow{I_{N2}} + \overrightarrow{I_{N3}}$$

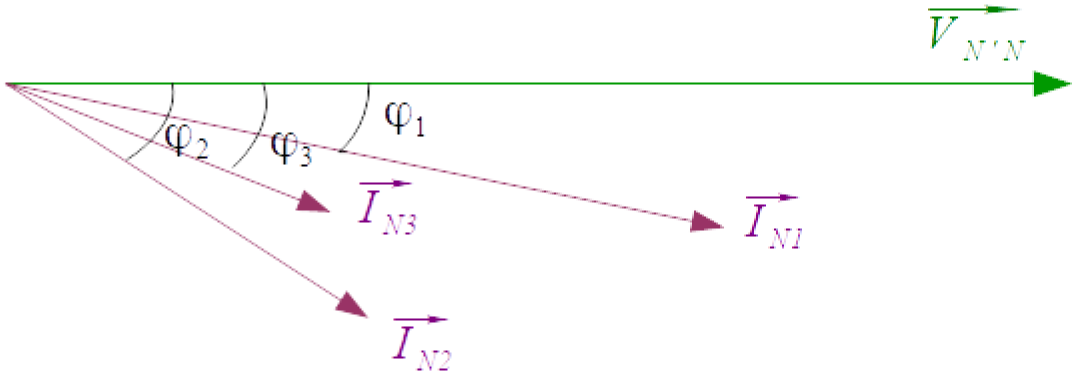
Sachant que le système est sans fil neutre, c'est-à-dire que le courant du neutre est nul.

$$\vec{I}_1+\vec{I}_2+\vec{I}_3=\vec{0}$$

D'où :

$$\vec{I}'_1+\vec{I}'_2+\vec{I}'_3=\overrightarrow{I_{N1}}+\overrightarrow{I_{N2}}+\overrightarrow{I_{N3}}=\overrightarrow{I_{N0}}$$

Ces courants peuvent être représentés vectoriellement de la façon suivante :



Etant donné que la tension V1 est prise comme référence, on a :

$$I_{N0}\cos\varphi=I'_1\cos\varphi_1+I'_2\cos(\varphi_2+120°)+I'_3\cos(\varphi_3+240°)=6{,}63$$

et

$$I_{N0}\sin\varphi=-I'_1\sin\varphi_1-I'_2\cos(\varphi_2+\frac{2\pi}{3})-I'_3\cos(\varphi_3+\frac{4\pi}{3})=-4{,}46$$

Soit : $I_{N0}=\sqrt{6{,}63^2+4{,}46^2}=8\,A$

Et $\varphi_{N0}=\arctan(\frac{-4{,}46}{6{,}63})=-34°$

Calcul de l'impédance équivalente à $Z_1//Z_2//Z_3$:

$$Y\cos\varphi=Y_1\cos\varphi_1+Y_2\cos(\varphi_2)+Y_3\cos(\varphi_3)=0{,}169$$

$$Y\sin\varphi = -Y_1\sin\varphi_1 - Y_2\sin(\varphi_2) - Y_3\sin(\varphi_3) = -0{,}133$$

D’où Y= 0,215 S, soit Z=4,65 Ω

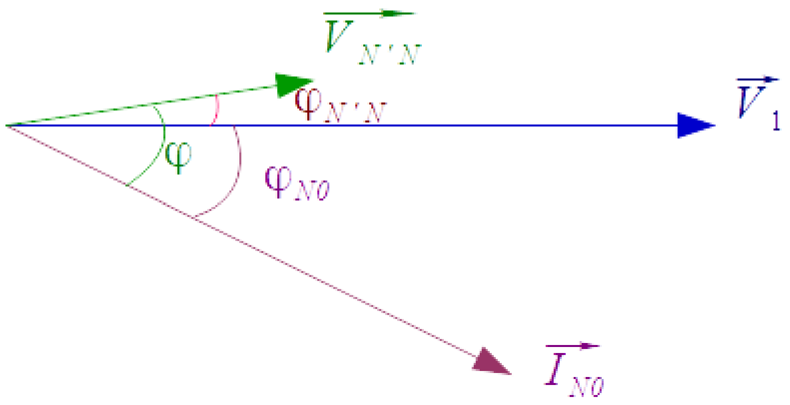
$$\varphi = \arctan\left(\frac{-0{,}133}{0{,}169}\right) = -38{,}2°$$

La valeur efficace de la tension $V_{N'N}$ est donnée par :

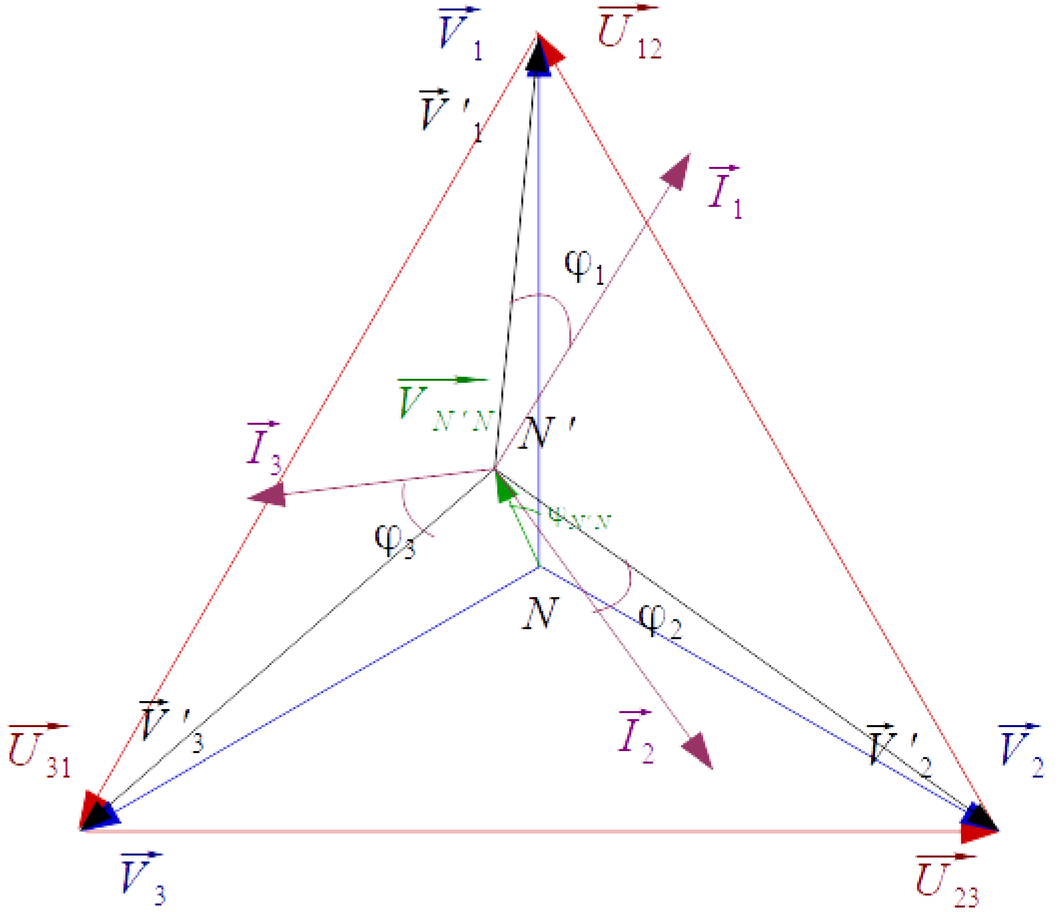
$$V_{N'N} = I_{N0} . Z = 8.4{,}65 = 37{,}2 V$$

Le déphasage de la tension $V_{N'N}$ par rapport à V_1 est :

$$\varphi_{N'N} = \varphi_{N0} - \varphi = -34° + 38{,}2° = 4{,}2°$$



$\overrightarrow{V_{N'N}}$ est en avance de phase de 4.8° par rapport à la tension de référence $\overrightarrow{V_1}$.



Calcul des tensions aux bornes des impédances :

On a :

$$\vec{V}'_1 = \vec{V}_1 - \overrightarrow{V_{N'N}}$$

$$\vec{V}'_2 = \vec{V}_2 - \overrightarrow{V_{N'N}}$$

$$\vec{V}'_3 = \vec{V}_3 - \overrightarrow{V_{N'N}}$$

Ce qui donne :

$$V'_1 = \sqrt{V_1^2 + V_{N'N}^2 - 2V_1 V_{N'N} \cos(\vec{V}_{1,} \overrightarrow{V_{N'N}})} = 182,9\,V$$

$$V'_2 = \sqrt{V_2^2 + V_{N'N}^2 - 2V_2 V_{N'N} \cos(\vec{V}_{2,} \overrightarrow{V_{N'N}})} = 242,8\,V$$

$$V'_3=\sqrt{V_3^{\,2}+V_{N'N}^{\,2}-2V_3V_{N'N}\cos(\overrightarrow{V_{3,}}\overrightarrow{V_{N'N}})}=238{,}5\,V$$

Détermination des déphasages :

$$\vec{V}_1.\vec{V}'_1=\vec{V}_1^{\,2}-\vec{V}_1.\overrightarrow{V_{N'N}}=V_1.V'_1.\cos(\overrightarrow{V_{1,}}\overrightarrow{V_{N'N}})$$

$$V_1.V'_1.\cos(\overrightarrow{V_{1,}}\vec{V}'_1)=V_1^{\,2}-V_1.V_{N'N}.\cos(\overrightarrow{V_{1,}}\overrightarrow{V_{N'N}})$$

$$\cos(\vec{V}_1,\vec{V}'_1)=\frac{V_1^{\,2}-V_1\cdot V_{N'N}\cdot\cos(\vec{V}_1,\overrightarrow{V_{N'N}})}{V_1\cdot V'_1}=0{,}9999$$

$$(\vec{V}_1,\vec{V}'_1)\approx 0°$$

$$\cos(\overrightarrow{V_{1,}}\vec{V}'_2)=\frac{V_1.V_2.\cos(\overrightarrow{V_{1,}}\vec{V}_2)-V_1.V_{N'N}.\cos(\overrightarrow{V_{1,}}\overrightarrow{V_{N'N}})}{V_1.V'_2}=-0{,}6$$

$$(\vec{V}_1,\vec{V}'_2)=-127°$$

$$\vec{V}_1\cdot\vec{V}'_3=V_1\cdot V'_3\cdot\cos(\vec{V}_1,\vec{V}'_3)=V_1\cdot V_3\cdot\cos(\vec{V}_1,\vec{V}_3)-V_1\cdot V_{N'N}\cdot\cos(\vec{V}_1,\overrightarrow{V_{N'N}})$$

$$\cos(\vec{V}_1,\vec{V}'_3)=\frac{V_1\cdot V_3\cdot\cos(\vec{V}_1,\vec{V}_3)-V_1\cdot V_{N'N}\cdot\cos(\vec{V}_1,\overrightarrow{V_{N'N}})}{V_1\cdot V'_3}=-0{,}616$$

$$(\vec{V}_1,\vec{V}'_3)=128°$$

Les courants dans les impédances sont :

$$I_1=\frac{V'_1}{Z_1}=18{,}45\,A$$

$$I_2=\frac{V'_2}{Z_2}=16{,}13\,A$$

$$I_3=\frac{V'_3}{Z_3}=11{,}87\,A$$

II- Méthode complexe :

Considérations préliminaires :

$$\underline{V_1} = 220\,e^{j0} = 220$$

$$\underline{V_2} = 220\,e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -110 - j190{,}5$$

$$\underline{V_3} = 220\,e^{-j\frac{4\pi}{3}} = -110 + j190{,}5$$

De même,

$$\underline{Z_1} = 10\,e^{j\,31{,}8°} = 8{,}5 + j5{,}27$$

$$\underline{Z_2} = 15\,e^{j\,45{,}6°} = 10{,}5 + j10{,}7$$

$$\underline{Z_3} = 20\,e^{j\,41{,}4°} = 15 + j13{,}23$$

On a :

$\underline{V_1} = \underline{V'_1} + \underline{V_{N'N}}$	$\frac{\underline{V_1}}{\underline{Z_1}} = \frac{\underline{V'_1}}{\underline{Z_1}} + \frac{\underline{V_{N'N}}}{\underline{Z_1}}$	$\underline{I'_1} = \underline{I_1} + \underline{I_{01}}$
$\underline{V_2} = \underline{V'_2} + \underline{V_{N'N}}$	$\frac{\underline{V_2}}{\underline{Z_2}} = \frac{\underline{V'_2}}{\underline{Z_2}} + \frac{\underline{V_{N'N}}}{\underline{Z_2}}$	$\underline{I'_2} = \underline{I_2} + \underline{I_{02}}$
$\underline{V_3} = \underline{V'_3} + \underline{V_{N'N}}$	$\frac{\underline{V_3}}{\underline{Z_3}} = \frac{\underline{V'_3}}{\underline{Z_3}} + \frac{\underline{V_{N'N}}}{\underline{Z_3}}$	$\underline{I'_3} = \underline{I_3} + \underline{I_{03}}$

En additionnant les intensités ci-dessus, on aura :

$$\underline{I'_1} + \underline{I'_2} + \underline{I'_3} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} + \underline{I_{01}} + \underline{I_{02}} + \underline{I_{03}}$$

Sachant que nous avons une installation triphasée sans fil neutre, cela s'exprime par :

$$\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3=0$$

Les courants $\underline{I}_{01}$, $\underline{I}_{02}$ et $\underline{I}_{03}$ résultent de l'alimentation fictive des impédances $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ et $\underline{Z}_3$ par la tension de déséquilibre $\underline{V}_{N'N}$.

On peut donc écrire :

$$\underline{I}_{01}+\underline{I}_{02}+\underline{I}_{03}=\underline{I}_0$$

Et par conséquent, nous avons :

$$\underline{I'}_1+\underline{I'}_2+\underline{I'}_3=\underline{I}_0$$

Avec :

$$\underline{I}_0=\underline{V}_{N'N}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3}\right)$$

D'où :

$$\underline{V}_{N'N}=\frac{\underline{I'}_1+\underline{I'}_2+\underline{I'}_3}{\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3}}=\frac{\frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1}+\frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_2}+\frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3}}$$

(Théorème de Millman)

$$\underline{I'}_1=\frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1}=\frac{220}{10\,e^{j31,8°}}=22\,e^{-j31,8°}=18,7-j11,6$$

$$\underline{I'}_2=\frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_2}=\frac{220\,e^{-j120°}}{15\,e^{j45,6°}}=14,7\,e^{-j(45,6°+120°)}=14,7\,e^{-j165,6°}=-14,2-j3,6$$

$$\underline{I'}_3=\frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_3}=\frac{220\,e^{j120°}}{20\,e^{j41,4°}}=11\,e^{j(-41,4°+120°)}=11\,e^{j78,6°}=2,17+j10,8$$

Soit :

$$\underline{I'}_1+\underline{I'}_2+\underline{I'}_3=6{,}67-j4{,}4=8\,e^{-j33{,}4°}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3}=0{,}085-j0{,}053+0{,}046-j0{,}047+0{,}038-j0{,}033$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3}=0{,}169-j0{,}133=0{,}215\,e^{-j38{,}2°}$$

Finalement :

$$\underline{V}_{N'N}=\frac{8\,e^{-j33{,}4°}}{0{,}215\,e^{-j38{,}2°}}=37{,}2\,e^{j4{,}8°}=37+j3{,}11$$

Détermination des tensions :

$$\underline{V}'_1=\underline{V}_1-\underline{V}_{N'N}=220-37-j3{,}11=183-j3{,}11=183\,e^{j1}$$

$$\underline{V}'_2=\underline{V}_2-\underline{V}_{N'N}=-110-j190{,}5-37-j3{,}11=-147-j193{,}6$$

$$\underline{V}'_2=-47-j193{,}6=-(147+j193{,}6)=243\,e^{-j127{,}2°}$$

$$\underline{V}'_3=\underline{V}_3-\underline{V}_{N'N}=-110+j190{,}5-37-j3{,}11=-147+j187{,}4$$

$$\underline{V}'_3=-(147-j187{,}4)=e^{j180°}\,238\text{func}\,e^{-j51{,}9°}=238\,e^{j128{,}1°}$$

Détermination des intensités :

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{V}'_1}{\underline{Z}_1}=\frac{183\,e^{j1}}{10\,e^{j31{,}8°}}=18{,}3\,e^{j(1°-31{,}8°)}=18{,}3\,e^{-j30{,}8°}$$

$$\underline{I}_2=\frac{\underline{V}'_2}{\underline{Z}_2}=\frac{243\,e^{-j127{,}2}}{15\,e^{j45{,}6°}}=16{,}2\,e^{j(-127{,}2°-45{,}6°)}=16{,}2\,e^{-j172{,}8°}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{V'}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{238\,e^{j128,1°}}{20\,e^{j41,4°}} = 11,9\,e^{j(128,1°-41,4°)} = 11,9\,e^{j86,7°}$$

N.B : Merci de signaler toute erreur éventuelle.